

Miloš Milićić

**ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA
IZ
MATEMATIČKE ANALIZE**

Akademski misao
Beograd, 2012

Dr Miloš Miličić, redovni profesor
Državnog univerziteta u Novom Pazaru

**ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA
IZ MATEMATIČKE ANALIZE**

Recenzent

Dr Ćemal Dolićanin, redovni profesor i rektor
Državnog univerziteta u Novom Pazaru

Izdavač

AKADEMSKA MISAO
Beograd

Dizajn korice

Zorica Marković
akademska slikar

Štampa

Akademska misao
Beograd

ISBN 978-86-7466-429-2

NAPOMENA: Fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način ili ponovno objavljivanje ove knjige u celini ili u delovima - nije dozvoljeno bez saglasnosti i pismenog odobrenja izdavača.

PREDGOVOR

Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize namenjena je prvenstveno studentima prirodno-matematičkih, računarsko-informatičkih, tehničkih i drugih fakulteta na kojima se izučavaju pojmovi matematičke analize i predstavlja celinu sa udžbenikom *Matematička analiza*, čiji sam takođe autor, a koji istovremeno objavljuje *Akademski misao* iz Beograda.

Koristeći svoje višegodišnje iskustvo nastojao sam da materija u knjizi bude obrađena tako da studentima znatno olakša ovladavanje pojmovima matematičke analize, a samim tim i pripremu ispita. Na početku svakog poglavlja dat je kratak pregled teorije, zatim je detaljno rešen izvestan broj karakterističnih zadataka i na kraju je dat veliki broj zadataka za samostalno rešavanje, za koje su u poslednjem poglavlju dati rezulteti, za neke uputstva, a za neke teže i potpuna rešenja.

Srdačno zahvaljujem dr Ćemalu Dolićaninu, redovnom profesoru i rektoru Državnog univerziteta u Novom Pazaru, koji mi je, u svojstvu recenzenta, dao niz korisnih sugestija pri pisanju zbirke, kao i na finansijskoj pomoći, koju sam dobio od Državnog univerziteta u Novom Pazaru, za kompjutersku pripremu teksta.

U Beogradu, 15. 01. 2012.

Autor

Sadržaj

1	Skup realnih brojeva	7
2	Realna funkcija jedne realne promenljive	20
2.1	Uvodni zadaci	20
2.2	Inverzna funkcija	28
2.3	Domen (definicioni skup) funkcije	44
2.4	Parnost i neparnost funkcije	52
2.5	Periodičnost funkcije	54
2.6	Skup vrednosti funkcije. Maksimum i minimum	58
2.7	Grafici funkcija	65
2.8	Krive zadate parametarskim jednačinama	101
2.9	Krive definisane jednačinom u polarnim koordinatama	104
3	Beskonačni brojevni nizovi	111
4	Granična vrednost i neprekidnost funkcije	130
4.1	Granična vrednost funkcije	130
4.1.1	Pojam granične vrednosti funkcije. Leva i desna granična vrednost	130
4.1.2	Izračunavanje graničnih vrednosti funkcije	138
4.1.3	Beskonačno male i beskonačno velike veličine	159
4.2	Neprekidnost funkcije	168
5	Izvodi i diferencijali	179
5.1	Izvodi	179
5.1.1	Prvi izvod funkcije	179
5.1.2	Izračunavanje prvog izvoda funkcije	186
5.1.3	Izvodi višeg reda	206
5.2	Diferencijal funkcije	219
5.3	Teoreme o srednjoj vrednosti funkcije	227

5.4	Lopitalovo pravilo	233
5.5	Tejlorova formula	240
5.6	Tangente i normale krivih u ravni	252
5.7	Ispitivanje funkcija	259
5.8	Zadaci iz maksimuma i minimuma	285
5.9	Krivina krive u ravni	289
6	Neodređeni integral	296
6.1	Neposredna integracija	296
6.2	Metoda smene promenljive	300
6.3	Metoda parcijalne integracije	303
6.4	Integracija racionalnih funkcija	307
6.5	Integracija iracionalnih funkcija	315
6.6	Integracija trigonometrijskih funkcija	328
6.7	Integracija nekih iracionalnih funkcija	333
6.8	Integracija drugih transcendentnih funkcija	336
6.9	Razni zadaci	337
7	Određeni integral i njegove primene	338
7.1	Definicija i izračunavanje određenog integrala	338
7.2	Nesvojstveni integrali	344
7.3	Izračunavanje površine ravne figure	349
7.4	Izračunavanje zapremine obrtnog tela	358
7.5	Izračunavanje dužine luka	365
7.6	Izračunavanje površine obrtne površi	370
8	Redovi	375
8.1	Numerički redovi	375
8.1.1	Konvergenција i svojstva numeričkih redova	375
8.1.2	Nenegativni redovi	380
8.1.3	Naizmenični redovi. Apsolutna i neapsolutna konvergenција	390
8.2	Funkcionalni nizovi i redovi	395
8.3	Stepeni redovi	406
8.4	Furiјеovi redovi	433
9	Realne funkcije više realnih promenljivih	448
9.1	Pojam funkcije više promenljivih	448
9.2	Granična vrednost i neprekidnost funkcije dve promenljive	453
9.3	Parcijalni izvodi i totalni diferencijal...	459
9.4	Ekstremne vrednosti funkcija više promenljivih	493
10	Uputstva i rezultati	510